

L.B. Monastir	Devoir de contrôle n : 1 <i>Durée : 120 minutes</i>	3^{ème} Math
<i>P.P. : Ali Zouhaier</i>		2012-2013

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant** votre choix.

1/ La fonction $f : x \mapsto \frac{2012}{1 + \sqrt{x-7}} + 7$ est bornée sur son domaine de définition

2/ Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} ; $f(0) = -3$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

On a $f(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

3/ Soit ABC est un triangle isocèle en A inscrit dans un cercle de centre O.

On a $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} [2\pi]$

4/ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 3x + 2x^2}{(1 - |x|)(3x - 1)} = 4.$

Exercice 2 (6 points)

1/ Déterminer le domaine de définition D_f de $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}$

2/ Etudier la continuité de f sur son domaine de définition D_f .

3/a- Montrer que pour tout $x \in D_f$; $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1}$

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow 3} f(x).$

4/ Soit h la fonction définie par $h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 4} & \text{si } x < 1 \\ x - \frac{5}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a- Montrer que h est continue en 3.

b- Etudier la continuité de h en 1.

5/a- Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]2; 6[$

b- Donner un encadrement de α d'amplitude inférieur à 2.

Exercice 3 (6 points)

ABC est un triangle équilatéral tel que $AB=6$, I le milieu de $[AB]$.

1/ Soit l'ensemble $\Delta = \{M \in P; MA^2 - MB^2 = 36\}.$

a- Vérifier que $B \in \Delta.$

b- Montrer que pour tout M du plan P on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}.$

c- En déduire l'ensemble $\Delta.$

2/ Soit G le barycentre des points pondérés (A, 2) et (B, -5).

a- Montrer que pour tout M du plan on a : $2MA^2 - 5MB^2 = -3MG^2 + 120.$

b- En déduire l'ensemble $E = \{M \in P; 2MA^2 - 5MB^2 = -2012\}.$

3/ Soit le repère orthonormé $R = \left(I; \frac{1}{IB} \overrightarrow{IB}; \frac{1}{IC} \overrightarrow{IC} \right)$

- a- Déterminer les coordonnées de chacun des points A, B et C dans le repère R
 b- Donner une équation cartésienne de chacun des ensembles Δ et E.
 c- Etudier la position relative de Δ et E.

Exercice 4 (4 points)

Dans le plan orienté P ,on considère le triangle ABC tel que

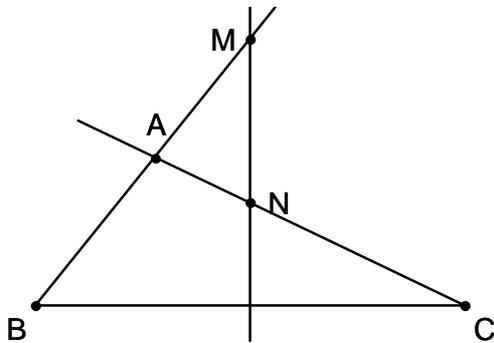
$$\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv -\frac{14024\pi}{7} [2\pi] \text{ et } \widehat{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})} \equiv -\frac{450\pi}{7} [2\pi].$$

1/ Donner la mesure principale de $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}$.

2/ Calculer une mesure de $\widehat{(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})}$.

3/ Posons M le point d'intersection de la demi droite [BA) et de la droite Δ la médiatrice de [BC] N est le point d'intersection de Δ et (AC).

Calculer $\widehat{(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MN})}$ puis $\widehat{(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NA})}$.



Bon Travail

Exercice 1

1/ **Vrai**

$$\bullet f(x) = \frac{2012}{1 + \sqrt{x-7}} + 7 \geq 7 \text{ donc } f \text{ est minorée par } 7.$$

$$\bullet \sqrt{x-7} \geq 0 \Rightarrow 1 + \sqrt{x-7} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{1 + \sqrt{x-7}} \leq 1 \Rightarrow \frac{2012}{1 + \sqrt{x-7}} \leq 2012$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2012}{1 + \sqrt{x-7}} + 7 \leq 2019 \text{ donc } f \text{ est majorée par } 2019$$

2/ **Vrai**

Supposons par l'absurde qu'il existe un réel a tel que $f(a) > 0$

Alors on aura : f est continue sur l'intervalle de bornes a et 0 et aussi $f(0) \times f(a) < 0$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe au moins un réel b entre a et 0 tel que $f(b) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse $f(x) \neq 0$ pour tout x de \mathbb{R}
Conclusion notre supposition est fautive et on a $f(x) < 0$ pour tout x de \mathbb{R} .

3/ **Vrai**

$$\bullet ABC \text{ est isocèle en } A \text{ donc } \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv \pi - 2 \widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})} [2\pi]$$

$$\bullet O \text{ est le centre du cercle circonscrit à } ABC \text{ donc } \widehat{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} \equiv 2 \widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})} [2\pi]$$

$$\text{Donc } \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} \equiv \pi - \widehat{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} [2\pi]$$

4/ **Faux**

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 3x + 2x^2}{(1 - |x|)(3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + 3x + 2x^2}{(1 - (-x))(3x - 1)} \quad \text{car } x \text{ est très proche de } -1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{(1+x)(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 2

$$1/ f(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} \text{ existe } \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \text{ et } x-3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \text{ et } x \neq 3.$$

Conclusion : $D_f = [2; +\infty[\setminus\{3\}$.

2/ $(x \mapsto x-2)$ est continue et positive sur $[2; +\infty[\setminus\{3\}$.

donc $(x \mapsto \sqrt{x-2})$ est continue sur $[2; +\infty[\setminus\{3\}$.

donc $(x \mapsto \sqrt{x-2} - 1)$ est continue sur $[2; +\infty[\setminus\{3\}$.

Aussi $(x \mapsto x-3)$ est continue et ne s'annule pas sur $[2; +\infty[\setminus\{3\}$

Alors $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}$ est continue sur $[2; +\infty[\setminus\{3\}$.

$$3/a- \text{ Pour tout } x \in D_f ; f(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} \times \frac{\sqrt{x-2} + 1}{\sqrt{x-2} + 1}$$

$$= \frac{x-2-1^2}{(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1}$$

$$b- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} = 0.$$

$$4/a- \bullet h(3) = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} = \frac{1}{2}$$

Donc f est continue en 3.

$$\text{b- } \bullet f(1) = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-4)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x-4} = \frac{3}{-3} = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Donc f n'est pas continue en 1.

5/a- la fonction $\left(x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 4}\right)$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1; 4\}$ (fonction rationnelle)

donc $h: x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^2 - 5x + 4}$ est continue sur $[2; 3[$.

• h est continue en 3.

• la fonction $(x \mapsto x - 2)$ est continue et positive sur $[3; 6]$

donc la fonction $(x \mapsto \sqrt{x-2})$ est continue sur $[3; 6]$

alors la fonction $(x \mapsto \sqrt{x-2} + 1)$ est continue et ne s'annule pas sur $[3; 6]$

Donc la fonction $h: x \mapsto h(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1}$ est continue sur $[3; 6]$

Bilan : h est continue sur $[2; 6]$

de plus $h(2) \times h(6) = \left(2 - \frac{5}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{6-2} + 1} = -\frac{1}{6} < 0$ donc d'après le

théorème de valeur intermédiaire l'équation $h(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $]2; 6[$.

b- On remarque que $h(2) = -\frac{1}{2} < 0$ et $h(3) = \frac{1}{2} > 0$ donc $2 < \alpha < 3$ c'est un encadrement de α d'amplitude 1.

Exercice 3

$$1/a- BA^2 - BB^2 = 6^2 - 0 = 36 \quad \text{donc } B \in \Delta.$$

$$\text{b- } MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \\ = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM}) = (2\overrightarrow{MI}) \cdot \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

$$\text{c- } M \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 36 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \text{d'après 1/a- et 1/b-} \\ \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow M \in \Delta \text{ à la droite perpendiculaire à } (AB) \text{ en } B.$$

Conclusion : Δ est la droite perpendiculaire à (AB) en B .

$$2/a- 2MA^2 - 5MB^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 - 5\overrightarrow{MB}^2 = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - 5(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ = 2MG^2 + 4\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + 2GA^2 - 5MG^2 - 10\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} - 5GB^2 \\ = -3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (2\overrightarrow{GA} - 5\overrightarrow{GB}) + 2GA^2 - 5GB^2 \\ = -3MG^2 + 2GA^2 - 5GB^2.$$

* G est le barycentre des points $(A, 2)$ et $(B, -5)$

$$\text{donc } \overrightarrow{AG} = \frac{-5}{2 + (-5)} \overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BG} = \frac{2}{2 + (-5)} \overrightarrow{BA}$$

$$\text{alors } \|\overrightarrow{AG}\| = \left| \frac{-5}{2 + (-5)} \right| \|\overrightarrow{AB}\| \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BG}\| = \left| \frac{2}{2 + (-5)} \right| \|\overrightarrow{BA}\|$$

$$\text{d'où } AG = \frac{5}{3} \times 6 = 10 \quad \text{et} \quad BG = \frac{2}{3} \times 6 = 4.$$

$$\text{Ainsi } 2MA^2 - 5MB^2 = -3MG^2 + 2 \times 10^2 - 5 \times 4^2 = -3MG^2 + 120.$$

$$\text{b- } M \in E \Leftrightarrow 2MA^2 - 5MB^2 = -2012$$

$$\Leftrightarrow -3MG^2 + 120 = -2012$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = \frac{-2012 - 120}{-3} = \frac{2132}{3}$$

$$\Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{2132}{3}}$$

$$\Leftrightarrow M \in \mathcal{C} \left(G; \sqrt{\frac{2132}{3}} \right) \text{ (le cercle de centre G et de rayon } \sqrt{\frac{2132}{3}} \text{)}$$

3a- Dans le repère $R = \left(I; \frac{1}{IB} \vec{IB}; \frac{1}{IC} \vec{IC} \right)$ on a :

$$B(3;0) ; A(-3;0) \text{ et } C(0; \sqrt{27}) \quad \text{car } IC = \sqrt{BC^2 - IB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27}.$$

$$\text{b- } M(x,y) \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 + (y-0)^2 - (x-3)^2 - (y-0)^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - x^2 + 6x - 9 - y^2 = 36$$

$$\Leftrightarrow x = 3.$$

Ainsi Δ a pour équation cartésienne $x - 3 = 0$.

$$\blacktriangleright M(x,y) \in E \Leftrightarrow 2MA^2 - 5MB^2 = -2012$$

$$\Leftrightarrow 2[(x+3)^2 + (y-0)^2] - 5[(x-3)^2 + (y-0)^2] = -2012$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 18 + 2y^2 - 5x^2 + 30x - 45 - 5y^2 = -2012$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 42x - 3y^2 = -2012 + 45 - 18 = -1985$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 14x + y^2 = \frac{1985}{3}$$

$$\Leftrightarrow (x+7)^2 + (y-0)^2 = \frac{1985}{3} + 49 = \frac{2132}{3}$$

Ainsi E a pour équation cartésienne $(x+7)^2 + (y-0)^2 = \frac{2132}{3}$.

c- E est de centre le point $J(-7;0)$ et de rayon $r = \sqrt{\frac{2132}{3}}$

$$\text{Donc } d(J; \Delta) = \frac{|-7+3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 4 < \sqrt{\frac{2132}{3}} = r \text{ donc } \Delta \text{ et } E \text{ sont sécants.}$$

Exercice 4

$$1/ \widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})} \equiv -\frac{14024\pi}{7} \quad [2\pi]$$

$$\equiv -2003\pi - \frac{3\pi}{7} \quad [2\pi]$$

$$\equiv -2004\pi + \pi - \frac{3\pi}{7} \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{4\pi}{7} \quad [2\pi].$$

Comme $\frac{4\pi}{7} \in]-\pi; \pi]$ alors $\frac{4\pi}{7}$ est la mesure principale de $\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})}$.

$$2/ \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} + \widehat{(\vec{BA}; \vec{BC})} + \widehat{(\vec{AC}; \vec{AB})} \equiv \pi \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} - \frac{450\pi}{7} + \left(-\frac{4\pi}{7}\right) \equiv \pi \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} \equiv \pi + \frac{450\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} \equiv \frac{461}{7}\pi \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} \equiv 66\pi - \frac{\pi}{7} \quad [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CB}; \vec{CA})} \equiv -\frac{\pi}{7} \quad [2\pi]$$

3/ . $M \in \Delta$ la médiatrice de $[BC]$ donc MBC est un triangle isocèle

$$\begin{aligned}
\text{alors } \widehat{(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC})} &\equiv \pi - 2\widehat{(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BM})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \pi - 2\widehat{(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})} \quad [2\pi] \quad \text{car } M \in [BA] \\
&\equiv \pi + 2\widehat{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \pi + 2 \times \frac{-450\pi}{7} \quad [2\pi] \\
&\equiv -128\pi + \frac{3\pi}{7} \quad [2\pi] \\
&\equiv \frac{3\pi}{7} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

Comme N aussi appartient à la médiatrice de [BC] donc [MN] est la bissectrice intérieure de $\widehat{(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC})}$.

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \widehat{(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MN})} &\equiv \frac{1}{2}\widehat{(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MC})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \frac{3\pi}{14} \quad [2\pi].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cdot \widehat{(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NA})} &\equiv \widehat{(\overrightarrow{NM}; \overrightarrow{NI})} + \widehat{(\overrightarrow{NI}; \overrightarrow{NC})} + \widehat{(\overrightarrow{NC}; \overrightarrow{NA})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \pi + \left(\pi - \widehat{(\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{IN})} - \widehat{(\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CI})} \right) + \pi \quad [2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{2} - \widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})} \quad [2\pi] \quad \text{car } \widehat{(\overrightarrow{CN}; \overrightarrow{CI})} \equiv \widehat{(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{2} + \widehat{(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})} \quad [2\pi] \\
&\equiv \frac{5\pi}{14} \quad [2\pi] \quad \text{car } \widehat{(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA})} \equiv -\frac{\pi}{7} \quad [2\pi]
\end{aligned}$$

